

# PATENT ABSTRACTS OF JAPAN

(11)Publication number : 61-058076

(43)Date of publication of application : 25.03.1986

(51)Int.Cl.

G06F 15/16

G06F 15/20

(21)Application number : 59-180947

(71)Applicant : SUMITOMO ELECTRIC IND LTD

(22)Date of filing : 29.08.1984

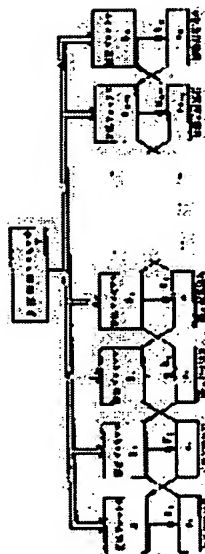
(72)Inventor : KAJI MIKIO

## (54) SIMULTANEOUS PRIMARY EQUATION SIMULATOR

### (57)Abstract:

PURPOSE: To make possible the calculation for a short time by utilizing the band efficiency matrix of simultaneous primary equation and dividing into several blocks and processing by each processor.

CONSTITUTION: A simulator consists of an all control processor T, (m) number of a subordinate processor S and an auxiliary storage device M. The auxiliary storage device memorizes each asymptotic value of the unknown number vector  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ . A subordinate processor S<sub>j</sub> defines a vector asymptotic value  $\phi_j(k)$ , W<sub>m(k)</sub> k times to input into support storage device M<sub>j</sub> according to it. After all vector asymptotic value  $\phi_j(k), \phi_m(k)$  are recognized, each subordinate processor changes j into j + 1 to calculate  $[\phi_j(k+1)]$  from  $[\phi_j(k)]$ . The result is inputted into the auxiliary storage device [M<sub>j</sub>]. The all control processor T carries out the synchronous control and spreading discrimination every time.



## LEGAL STATUS

[Date of request for examination]

[Date of sending the examiner's decision of rejection]

[Kind of final disposal of application other than the examiner's decision of rejection or application converted registration]

[Date of final disposal for application]

[Patent number]

[Date of registration]

[Number of appeal against examiner's decision of rejection]

[Date of requesting appeal against examiner's decision of rejection]

[Date of extinction of right]

Copyright (C); 1998,2003 Japan Patent Office

## ⑫ 公開特許公報(A)

昭61-58076

⑪ Int. Cl.<sup>4</sup>G 06 F 15/16  
15/20

識別記号

庁内整理番号

Z-6619-5B  
6619-5B

⑬ 公開 昭和61年(1986)3月25日

審査請求 未請求 発明の数 1 (全5頁)

⑭ 発明の名称 連立一次方程式シミュレータ

⑮ 特 願 昭59-180947

⑯ 出 願 昭59(1984)8月29日

⑰ 発 明 者 鍛 治 幹 雄 大阪市此花区島屋1丁目1番3号 住友電気工業株式会社  
大阪製作所内

⑱ 出 願 人 住友電気工業株式会社 大阪市東区北浜5丁目15番地

⑲ 代 理 人 弁理士 川 瀬 茂 樹

## 明 細 書

## 1. 発明の名称

連立一次方程式シミュレータ

## 2. 特許請求の範囲

1個の全体制御プロセッサTと、m個の従属プロセッサ $S_1, S_2, \dots, S_m$ 及びm個の補助記憶装置 $M_1, M_2, \dots, M_m$ よりなり、元数の大きな連立一次方程式を、帯行列を係数行列とし未知ベクトルを $\{\phi_j\}$ とすると、j番目の式はj番目の未知ベクトル $\phi_j$ と前後のベクトル $\phi_{j-1}, \phi_{j+1}$ とを含み、 $\phi_j$ の係数行列式の値 $\det|A_j|$ が $\phi_{j-1}, \phi_{j+1}$ の係数行列式の値 $\det|U_j|, \det|L_j|$ の値より大きくなるようにm個のブロック式に分け、j番目の補助記憶装置 $M_j$ はj番目の未知ベクトル $\phi_j$ の漸近値 $\phi_j(k)$ を記憶し、m個の未知ベクトル $\{\phi_j\}$ に対し、適当な初期値 $\{\phi_j(1)\}$ を与えて、従属プロセッサ $\{S_j\}$ と補助記憶装置 $\{M_j\}$ とが繰返し未知ベクトルの漸近値 $\{\phi_j(k)\}$ を計算する事とし、j番目の従属プロセッサ $S_j$ はm個のブロック式の内のj番目の式と、補助記憶装置 $\{M\}$ に記憶されている $(k-1)$

回目の漸近値 $\phi_{j-1}(k)$ と $\phi_{j+1}(k-1)$ などから、k回目の漸近値 $\phi_j(k)$ を計算して、補助記憶装置 $M_j$ に $\phi_j(k)$ の値を記憶させる動作を繰返し行う事とし、全体制御プロセッサTは、k回目の $\{\phi_j(k)\}$ の計算が全ての従属プロセッサ $\{S_j\}$ に於て同時に並列処理するよう同期制御し、かつ新たに計算されたk回目の漸近値 $\phi_j(k)$ と $(k-1)$ 回目の漸近値の差の絶対値と予め定めた微小ベクトル $\epsilon$ とを比較する収束判定を行い、全てのベクトル $\{\phi_j\}$ が収束した時に、これを連立一次方程式の解である、とする事の特徴とする連立一次方程式シミュレータ。

## 3. 発明の詳細な説明

## (ア) 技 術 分 野

この発明は、連立一次方程式シミュレータの構成方式に関する。

## (イ) 従 来 技 術

偏微分方程式で記述される物理現象をデジタル計算機でシミュレートする時には、連立一次方程式を数値的に解く必要がある。

連立一次方程式は、解き方が明確に分っているから、必ず解ける。

しかし、連立一次方程式の元数が大きくなれば、多大の計算時間を要する。

未知数の数、すなわち独立な方程式の数を元という。これを  $n$  とすると、演算回数は  $n^2 \sim n^3$  のオーダーで増大してゆく。

未知数を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とし、係数を  $a_{ij}$  とすると、 $n$  元連立方程式は、

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (1)$$

と書く事ができる。これを解くには、係数の行列の値

$$\Delta = \det |a_{ij}| \quad (2)$$

を求め、さらに、 $[a_{ij}]$  の  $j$  番目の列ベクトルを  $[b_i]$  で置換したものの行列の値  $\bar{A}_j$  を求めなければならない。

$$x_j = \frac{\bar{A}_j}{\Delta} \quad (3)$$

る並列シミュレータを与える事を目的とする。

#### (c) 構 成

物理現象を扱う場合は、物理量が変位、速度、加速度、角加速度、角速度、渦、……などベクトル量である事が多い。2次元或は3次元ベクトルである。ひとつのベクトルが  $(x_1, x_2, x_3)$  という3つの未知数からなる。

ところが物理現象を記述する方程式は、マックスウェル方程式やナビエーストックス方程式など、3次元ベクトルの形で表現される事が多い。

すると、ひとつの物理量ベクトルに対して、ひとつの係数行列が対応して、行列とベクトルの積が、いくつか集まって、連立一次方程式の内の3つの式を構成する、という事になる。

つまり、(1)式に於て、 $x_j$  をベクトル  $\phi_j$  に置きかえ、 $a_{ij}$  を行列とし、 $b_i$  をベクトルとした式が成り立つ事が多い。例えば  $\phi_j$  は3次元ベクトルで、 $a_{ij}$  は  $(3 \times 3)$  の行列で、 $b_i$  は3次元ベクトルであるとするものである。

すると(1)式のかわりに、

である。これは厳密解である。 $n \times n$  の行列の値を求めるには、 $n!$  個の積を計算し、これを加え合わせなければならない。計算すべき行列は  $(n+1)$  個あるから、積計算だけで  $(n+1)!$  の項の計算をしなければならない。

$n$  の数が多くなると、これは膨大な数となつて、高性能の計算機であつても、多大の計算時間を要する。

もちろん、多くの場合、係数  $[a_{ij}]$  は0であるものが多く、実際には、このように多くの計算を伴うわけではない。ひとつの式について、0でない係数の数が2つ、3つ、或は4つしかない、という場合も多い。

しかし、このような場合であつても、演算回数は  $n^2 \sim n^3$  程度には比例して、増大する。

#### (d) 目 的

本発明は、得られる連立一次方程式の係数行列が帯行列になる事が多いのに着目し、それをいくつかのブロックに分け、それぞれを別々のプロセッサで処理する事により、短時間で計算を行い得

$$\sum_{j=1}^{n/3} A_{ij} \phi_j = b_i \quad (4)$$

となる。この式は  $n$  個の連立一次方程式である。 $A_{ij}$  が行列、 $\phi_j$  はベクトルであるから、この演算は、もちろん、次のようにするわけである。簡単のため、 $i, j$  のサフィックスを省き、 $A$  の行列要素を  $[a_{pq}]$ 、 $\phi$  の成分を  $[x_q]$  と書く事にすると、

$$A \phi = \sum_{q=1}^3 a_{pq} x_q \quad (5)$$

となるわけである。

これは3次元ベクトルの場合であるが、3次元ベクトルが多数集まったベクトルを  $\phi_j$  とし、(4)式の形に替ける場合も多い。結局、 $h$  元ベクトルを  $m$  個使つて、全方程式を書く事ができる、という場合がある。

$$m h = n \quad (6)$$

である。 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$  は  $h$  元ベクトルで、行

列  $A$  は  $(h \times h)$  の行列である。  $A$  と  $\phi$  の積は、  
(5) 式のかわりに、

$$A\phi = \sum_{q=1}^h a_{pq} x_q \quad (7)$$

となり、全連立一次方程式は、

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} \phi_j = b_i \quad (8)$$

という形になる。

(1) 式で表わされる任意の  $n$  元連立一次方程式は、必ず (7)、(8) のような方程式に書き換える事ができる。

物理現象を扱う場合は、さらに進んで、(8) 式に於て、ベクトル  $\phi_j$  の係数行列の内、2 ~ 3 つだけが 0 でない、という場合が多い。これが重要な点である。

そこで、 $h$  の成分をもつベクトル  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$  に関して、次のような形の帯行列の式にする事ができる、とする。

まり、すべての式が隣接 (サイクリックに) するベクトル 3 つを含む式であつても良い。

さらに、ひとつの式に含まれるベクトルの数は必ず 3 つでなければならないという事ではなく、あるものは 4 つあつても良いし、5 つあつても良いわけである。後の処理がより複雑になる、というわけではない。

(9) 式を作るに当つて、もとの式を、 $m$  個の  $h$  元式に単にブロックわけしたというのではなく、ひとつの式によつて、前後のベクトルがつながれてゆく、という必要がある。隣接するベクトルが順次、式に現われる。

しかし、この条件が課されても、(9) 式の表現が一意的に定まるわけではなく、自由度が残っている。(9) 式のそれぞれの式は、数係数を乗じて加減しても良いし、行列を乗じて加減しても良い。このような変形は自由である。

ひとつ、重要な事は、収束性に関する問題である。 $b_j, b_{j+1}$  に関する式は

$$\left. \begin{aligned} A_1 \phi_1 + L_1 \phi_2 &= b_1 \\ U_2 \phi_1 + A_2 \phi_2 + L_2 \phi_3 &= b_2 \\ \dots\dots\dots \\ U_m \phi_{m-1} + A_m \phi_m &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

これを帯行列を持つ連立一次方程式という。

この式を作るためには、 $\phi_j$  の成分としての  $\{x_q\}$  の選び方、式の順序などについて工夫しなければならない。

この式の特徴は、 $j = 1, m$  以外の  $\phi_j$  については、 $\phi_j$  と、その前  $\phi_{j-1}$ 、その後  $\phi_{j+1}$  の 3 つのベクトルだけを含む式が必ずひとつ存在し、 $j = 1, j = m$  の  $\phi_j$  に関しては、 $\phi_j$  と、 $\phi_{j+1}$  又は  $\phi_j$  と  $\phi_{j-1}$  を含む式がひとつずつ存在する、という事である。

そこで、(9) 式に於て、 $j$  番目の式では、 $\phi_j$  の係数を  $A_j$  と書き、その前の  $\phi_{j-1}$  の係数を  $U_j$  と書き、その後の  $\phi_{j+1}$  の係数を  $L_j$  と書いてある。

(a) 式は典型的な例にすぎない。 $\phi_1, \phi_m$  に関して、さらに  $\phi_m$  の項と、 $\phi_1$  の項とが含まれても良い。つ

$$U_j \phi_{j-1} + A_j \phi_j + L_j \phi_{j+1} \quad (10)$$

$$U_{j+1} \phi_j + A_{j+1} \phi_{j+1} + L_{j+1} \phi_{j+2} \quad (11)$$

という項を持っている。

収束性を得るために、

$$|\det |A_j^{-1} L_j A_{j+1}^{-1} U_{j+1}| | < 1 \quad (12)$$

という条件が課されるべきである。ただし、 $A^{-1}$  は  $A$  の逆行列を示す。この計算は  $(h \times h)$  の行列の乗算であるが、行列の積のデタミナントの値は、それぞれの行列のデタミナントの積に等しいから、(12) 式は

$$|\det |A_j| \det |A_{j+1}| | > |\det |L_j| \det |U_{j+1}| | \quad (13)$$

という事である。この式は対角項の係数行列の積の行列式の値 (デタミナント) が、非対角項の係数行列の行列式の積より大きい、という事を要求

する。(13)式は、 $j$ 番目と $j+1$ 番目の式の、2つの式にわたるから、 $(m-1)$ 回同じようなチェックをしなければならない。(13)式を満足するための十分条件として、 $j$ 番目の式の内部に於て

$$|\det |A_j|| > |\det |L_j|| \quad (14)$$

$$|\det |A_j|| > |\det |U_j|| \quad (15)$$

が成立すれば良い。

ただちにこうならない場合もある。その場合は、隣接する式に定数を乗じたものを $j$ 番目の式に加えたり、引いたりして、(14)、(15)が成立するようにする。

第1図は本発明のシミュレータの構成を示す。

シミュレータは1個の全体制御プロセッサTと、 $m$ 個の従属プロセッサSと、 $m$ 個の補助記憶装置Mとよりなる。

補助記憶装置は、それぞれ未知数ベクトル $\phi_1$ 、 $\phi_2$ 、……、 $\phi_m$ の漸近値を記憶する。

従属プロセッサ $S_j$ は、(9)の方程式を $\phi_j$ の項を左

$\phi_j(k)$ が新しく入力される。第1図の下向き矢印がこれを示す。

こうして、 $k$ 回目のベクトル漸近値 $\phi_1(k)$ 、…… $\phi_m(k)$ の全てが分るから、同様の計算を、各従属プロセッサは、(16)式の $j$ を $j+1$ にかえて、 $\{\phi_j(k)\}$ から、 $\{\phi_j(k+1)\}$ を計算するようにする。この結果が補助記憶装置 $M_j$ に入力される。

このように、同様の計算を繰返すが、第2図に示すように、1回ごとに同期制御と、収束判定を行う。これは、全体制御プロセッサTが行なうのである。

同期制御は、各従属プロセッサでの計算のタイミングを合致させるためのものである。

収束判定は、 $j$ 番目のベクトルの $(k-1)$ 回目の漸近値と、 $k$ 回目の漸近値の差を求める操作で、これが予め定められた微小なベクトル $\epsilon$ より小さければ、 $j$ 番目のベクトルは厳密解の近くへ十分収束した、と判定する

$$|\phi_j(k) - \phi_j(k-1)| < \epsilon \quad (17)$$

収束判定は全体制御プロセッサTが、従属プロ

セッサに、それ以外の項を右辺に移行し、繰返し処理によつて、 $\phi_j$ の値を求めるものである。

繰返しの数を $\phi(k)$ で表わす事にする。

$j$ 番目の従属プロセッサ $S_j$ は、

$$A_j \phi_j(k) = b_j - U_j \phi_{j-1}(k-1) - L_j \phi_{j+1}(k-1) \quad (16)$$

という漸近式を用いて、 $(k-1)$ 回目の結果 $\phi_{j-1}(k-1)$ 、 $\phi_{j+1}(k-1)$ から、 $k$ 回目の結果 $\phi_j(k)$ を計算する。

全ての従属プロセッサは同時に(16)の演算をする。必要なデータの内、 $A_j$ 、 $b_j$ 、 $U_j$ 、 $L_j$ は定数行列であるから予め記憶している。 $(k-1)$ 回目のデータは、隣りの補助記憶装置から $\phi_{j-1}$ 、 $\phi_{j+1}$ を読みとつて使用する。これが第1図の補助記憶装置から従属プロセッサへ向う斜め上向きの矢印である。

従属プロセッサ $S_j$ は $k$ 回目のベクトル漸近値 $\phi_j(k)$ を求めると、これを対応する補助記憶装置 $M_j$ へ入力する。 $M_j$ の記憶から $\phi_j(k-1)$ が消え、

セッサごとに行うので、多少の時間の差がある。第2図の矢印の長さが異なるのは、こういう事を意味している。

収束判定の結果 $\phi_j$ の内ひとつでも、(17)式を満たさないものがある時は、さらにもう一回、同じような演算を繰返す。すべての $\phi_j$ が(17)式を満たした時に、繰返し演算を終了する。ここに得られたベクトル $\{\phi_j\}$ が、連立一次方程式の解である。

$\{\phi_j\}$ の初期値 $\{\phi_j(1)\}$ の与え方は任意である。例えば、全て0ベクトルとしても良い。このように、任意の定数を初期値としても良い。

収束の早い初期値を選ぶのが望ましいわけであるが、そのためには、例えば、2つの式ずつに分けて、前と後の $U$ 、 $L$ の項をおとした式、

$$A_1 \phi_1 + L_1 \phi_2 = b_1 \quad (18)$$

$$U_2 \phi_1 + A_2 \phi_2 = b_2 \quad (19)$$

のような、縮約された方程式を作り、この解を求めても良い。この解を初期値として出発する事もできる。

先程述べた、0ベクトルから出発する方法は、  
 $k = 2$  で

$$\phi_j(2) = A_j^{-1} b_j \quad (20)$$

となる初期値の選び方である。

どのような初期値を選んでも、(14)、(15) が成立する限り、厳密解に向つて収束する。しかし、収束の早さは、初期値の選び方によつて異なる。

#### (4) 効 果

係数行列が帯行列である連立一次方程式を短時間で解く事ができる。

元数の大きな連立一次方程式を  $m$  個の元数の小さな連立一次方程式に分解し、それを並列処理して解くからである。

#### 4. 図面の簡単な説明

第1図は本発明の連立一次方程式シミュレータの構成を示すブロック図。

第2図は本発明の連立一次方程式シミュレータの、並列処理が繰返される動作を示すための説明図。

T …… 全体制御プロセス  
 S …… 従属プロセス  
 M …… 補助記憶装置  
 $\phi_1 \sim \phi_m$  …… 未知ベクトル

発 明 者 鍛 治 幹 雄  
 特許出願人 住友電気工業株式会社  
 出願代理人 弁理士 川 瀬 茂 樹

